

格子への線形な有限群作用と $\text{mod } q$ 置換表現

大阪大学 大学院理学研究科 数学専攻
内海 凌 (Ryo UCHIUMI) *

概要

格子 L への線形な有限群作用が与えられたとき、各正整数 q に対して、 L/qL 上の置換表現 ($\text{mod } q$ 置換表現) が定まる。この置換表現や各既約指標に関する重複度、軌道の個数などは、いずれも q に関する準多項式となる。本稿では、これらの準多項式がもついくつかの性質を述べる。さらに、Weyl 群と coroot lattice での結果として、 $\text{mod } q$ 置換表現の各既約指標に関する重複度が、対応する fundamental alcove の Ehrhart 準多項式と関係深いことを紹介する。

1 Introduction

この章では、数え上げ関数としてよく現れる準多項式を定義し、本研究の背景にある諸理論について紹介する。

1.1 Quasi-polynomials

R を可換環とする。写像 $F : \mathbb{Z}_{(>0)} \rightarrow R$ が準多項式 (quasi-polynomial) であるとは、周期 (period) と呼ばれる正整数 $\tilde{n} \in \mathbb{Z}_{>0}$ 、構成素 (constituent) と呼ばれる多項式 $f_1(t), \dots, f_{\tilde{n}}(t) \in R[t]$ が存在して、

$$F(z) = f_r(z), \quad \text{if } z \equiv r \pmod{\tilde{n}}, \quad (1 \leq r \leq \tilde{n})$$

を満たしているときにいう。準多項式はしばしば“周期的な多項式”とも呼ばれており、特に数え上げ問題に関連した様々な場面で現れている。

準多項式 F が **gcd-property** をもつとは、各構成素 f_i が $\text{gcd}\{\tilde{n}, i\}$ の値だけで決まるときにいう。つまり、 $\text{gcd}\{\tilde{n}, i\} = \text{gcd}\{\tilde{n}, j\}$ であるとき $f_i = f_j$ を満たす。すべての準多項式が gcd-property をもつわけではないが、準多項式における重要な性質の一つである。

以下では、本研究と関係深い二種類の準多項式を紹介する。

1.1.1 Ehrhart quasi-polynomial

$\mathcal{P}$ を $\mathbb{R}^\ell$ 上の有理多面体とし、これを q 倍した多面体 $q\mathcal{P}$ の格子点を数えることを考える。このとき、 $q \in \mathbb{Z}_{>0}$ に関する数え上げ関数

$$L_{\mathcal{P}} : q \mapsto \#(q\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^\ell)$$

* E-mail: uchiumi.ryou.1xu@ecs.osaka-u.ac.jp / ryo.uchiumi.math@gmail.com

は準多項式である [BR07]. 関数 $L_{\mathcal{P}}$ は **Ehrhart 準多項式 (Ehrhart quasi-polynomial)** と呼ばれる. 特に, $\mathcal{P}$ が格子多面体であれば, $L_{\mathcal{P}}$ は単に多項式 (最小周期 1 の準多項式) となる.

Example 1.1. $\mathbb{R}$ 上の有理多面体として, 長さ 1 の線分 $\mathcal{P} = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ を考える. このとき, 関数 $L_{\mathcal{P}}$ は周期 2 の準多項式となる:

$$L_{\mathcal{P}}(q) = \begin{cases} q & \text{if } q \equiv 1 \pmod{2}; \\ q+1 & \text{if } q \equiv 2 \pmod{2}. \end{cases}$$

1.1.2 Characteristic quasi-polynomial

$\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{Z}^\ell$ を整数係数の零でない列ベクトルとする. 正整数 $q \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して $\mathbb{Z}_q := \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ とおく. 各列ベクトル $\alpha_i = {}^t(a_{i1}, \dots, a_{i\ell}) \in \mathbb{Z}^\ell$ に対して,

$$[\alpha_i]_q := {}^t([a_{i1}]_q, \dots, [a_{i\ell}]_q) \in \mathbb{Z}_q^\ell$$

とおく. ただし, $[a_{ij}]_q := a_{ij} + q\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}_q$ とする. $[\alpha_i]_q$ は α_i の **q -reduction** と呼ばれる. 各 i に対して, $\mathbb{Z}_q^\ell$ 上の “超平面” $H_{q,i}$ を

$$H_{q,i} := \left\{ x = (x_1, \dots, x_\ell) \in \mathbb{Z}_q^\ell \mid x[\alpha_i]_q = [0]_q \right\}$$

で定め, $\mathbb{Z}_q^\ell$ 上の “超平面配置” $\mathcal{A}_q := \{H_{q,1}, \dots, H_{q,n}\}$ を与える. また, 配置 $\mathcal{A}_q$ の補集合を

$$M(\mathcal{A}_q) := \mathbb{Z}_q^\ell \setminus \bigcup_{i=1}^n H_{q,i}$$

で定義する. このとき, 有限集合 $M(\mathcal{A}_q)$ を数え上げる関数

$$\chi_{\mathcal{A}}^{\text{quasi}} : q \mapsto \#M(\mathcal{A}_q)$$

は gcd-property をもつ準多項式であることが知られており [KTT08], **特性準多項式 (characteristic quasi-polynomial)** と呼ばれている. さらに, 準多項式 $\chi_{\mathcal{A}}^{\text{quasi}}$ の第 1 構成素は, 列ベクトル $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ で定義される $\mathbb{R}^\ell$ 上の超平面配置

$$\mathcal{A} := \{H_1, \dots, H_n\}, \quad H_i := \left\{ x = (x_1, \dots, x_\ell) \in \mathbb{R}^\ell \mid x\alpha_i = 0 \right\}$$

の**特性多項式 (characteristic polynomial)** となる, 超平面配置の特性多項式は, 超平面の交わり方だけで決まる多項式であり, 超平面配置の不変量として最も重要であるといわれている. 特性準多項式はその特性多項式を精密化したものと捉えることができる. また, 特性準多項式は正整数 q ごとに点を数え上げるという点で Ehrhart 準多項式と類似しており, Ehrhart 準多項式の “mod q 版” といわれることもある. 特に, ルート系から決まる超平面配置 (Coxeter arrangement) の特性準多項式は, そのルート系における fundamental alcove の (coweight lattice に関する) Ehrhart 準多項式と密接に関係している (cf. [Yos18]).

1.2 Group action and Equivariant Ehrhart theory

この節では、本研究の背景にある**同変 Ehrhart 理論 (Equivariant Ehrhart theory)**を紹介する。これは、Stapledon [Sta11] が導入した Ehrhart 理論の同変版であり、有限群による対称性をもつ多面体において、その上の格子点を表現の構造込みで数えるものである。

1.2.1 Group action and representation

Γ を有限群とし、 Γ が有限集合 X へ作用しているとする。すなわち、 Γ は X の対称群の部分群とみなせる。 $\gamma \in \Gamma$ で不変な元の集合を X^γ で表す：

$$X^\gamma := \left\{ x \in X \mid \gamma x = x \right\}.$$

元 $x \in X$ の Γ -軌道 (**Γ -orbit**) とは、 Γ による像 $\Gamma(x)$ のことをいい、 $x \in X$ の**固定部分群 (stabilizer subgroup)**^{*1}とは、 x を固定する元からなる部分群 Γ_x のことをいう：

$$\Gamma(x) := \left\{ \gamma x \in X \mid \gamma \in \Gamma \right\}, \quad \Gamma_x := \left\{ \gamma \in \Gamma \mid \gamma x = x \right\}.$$

有限群 Γ が有限集合 X に作用しているとする。 X で生成される $\mathbb{C}$ 上の線形空間 $\mathbb{C}X := \bigoplus_{x \in X} \mathbb{C}x$ に対して、 Γ の作用から得られる群準同型 $\rho_X : \Gamma \rightarrow \mathrm{GL}(\mathbb{C}X)$ を X の**置換表現 (permutation representation)**^{*2}という。 X の**置換指標 (permutation character)** とは、各線形写像 $\rho_X(\gamma)$ の trace を与える関数

$$\chi_X : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}; \gamma \mapsto \mathrm{tr}(\rho_X(\gamma))$$

のことをいう。 X の置換表現 ρ_X における各元 $\gamma \in \Gamma$ の表現行列として置換行列がとれるため、

$$\chi_X(\gamma) = \#X^\gamma$$

となることに注意する。

関数 $\phi, \psi : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ に対して、その内積 (ϕ, ψ) を

$$(\phi, \psi) = \frac{1}{\#\Gamma} \sum_{\gamma \in \Gamma} \phi(\gamma) \overline{\psi(\gamma)}$$

で定義する。ただし、 $z \in \mathbb{C}$ に対して、 $\bar{z}$ はその複素共役である。

本稿では、 Γ の既約指標 (irreducible character) 全体を $\chi_1, \dots, \chi_k$ のように表す。 Γ の任意の指標 χ は既約指標の和で

$$\chi = m_1 \chi_1 + \dots + m_k \chi_k$$

のように一意的に表せる。特に、各係数は $m_i = (\chi, \chi_i) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ となる。 m_i は χ の χ_i における**重複度 (multiplicity)** という。

^{*1} 安定化部分群, 等方部分群, isotropy group などともいう。

^{*2} 一般に、線形空間 V に対して定まる群準同型 $\rho : \Gamma \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ を V 上の**表現 (representation)** といい、関数 $\chi_\rho : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}; \gamma \mapsto \mathrm{tr} \rho(\gamma)$ を表現 ρ の**指標 (character)** という。

1.2.2 Equivariant Ehrhart theory

Γ を有限群とする． $L \cong \mathbb{Z}^\ell$ を lattice (格子) とし，線形な作用 $\rho : \Gamma \longrightarrow \mathrm{GL}(L)$ が与えられているとする．ただし， $\mathrm{GL}(L)$ は L 上の同型写像からなる群である． $\mathcal{P}$ を Γ の作用で不変な格子多面体とし，これを q 倍した多面体上の格子点の集合 $q\mathcal{P} \cap L$ の置換指標 $\chi_{q\mathcal{P}}$ を考える．

このとき，置換指標 $\chi_{q\mathcal{P}}$ が q についてどのように依存しているのかが問題の一つである．特に Γ の単位元 1 に対しては，

$$\chi_{q\mathcal{P}}(1) = \#(q\mathcal{P} \cap L) = L_{\mathcal{P}}(q)$$

となり，これは単に Ehrhart 多項式である．一般には，次のようにして準多項式が現れることが知られている．

Theorem 1.2 ([Sta11, Theorem 5.7, Corollary 5.9]). 次の写像はいずれも準多項式である：

- (1) $q \longmapsto \chi_{q\mathcal{P}}$;
- (2) Γ の既約指標 χ に対して， $q \longmapsto (\chi_{q\mathcal{P}}, \chi)$.

2 Main results

2.1 Set up

L を lattice (格子) とし， $B := \{\beta_1, \dots, \beta_\ell\}$ を L の $\mathbb{Z}$ -basis とする．つまり， $L = \mathbb{Z}\beta_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}\beta_\ell$ である． Γ を有限群とし， Γ が L に対して線形に作用しているとする．すなわち，群準同型 $\rho : \Gamma \longrightarrow \mathrm{GL}(L)$ が存在している．各元 $\gamma \in \Gamma$ に対して， $\rho(\gamma)$ の $\mathbb{Z}$ -basis B に関する表現行列を R_γ で表す．元 $x = x_1\beta_1 + \dots + x_\ell\beta_\ell$ とベクトル $x = (x_1, \dots, x_\ell) \in \mathbb{Z}^\ell$ を同一視すると，写像 $\rho(\gamma)$ は行列倍写像とみなすことができる：

$$\rho(\gamma) : x \longmapsto xR_\gamma$$

正整数 $q \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して， $L_q := L/qL$ とおく．群 Γ の L への作用は L_q への作用 $\rho_q : \Gamma \longrightarrow \mathrm{GL}(L_q)$ を誘導する．特に，各 $\gamma \in \Gamma$ に対して，写像 $\rho_q(\gamma)$ は行列倍写像

$$\rho_q(\gamma) : x \longmapsto x[R_\gamma]_q$$

とみなせることに注意する．ただし， $[R_\gamma]_q$ は行列 R_γ の q -reduction，すなわち $R_\gamma = (r_{ij})_{ij}$ であるとき $[R_\gamma]_q = ([r_{ij}]_q)_{ij}$ である．

2.2 Quasi-polynomiality of the permutation representation and multiplicities

本研究の目的は L_q の置換表現およびその指標 χ_{L_q} について調べることである． Γ の既約指標 $\chi_1, \dots, \chi_k$ に対して， q についての関数

$$m(\chi_i; q) := (\chi_{L_q}, \chi_i)$$

を与える. 各 $q \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して, $m(\chi_i; q)$ は χ_{L_q} の既約指標 χ_i に関する重複度である:

$$\chi_{L_q} = m(\chi_1; q)\chi_1 + \cdots + m(\chi_k; q)\chi_k.$$

本研究の主結果の一つとして, 吉永正彦氏^{*3}との共同研究において次の結果を得た.

Theorem 2.1 ([UY, Corollary 2.2, Theorem 2.5]). 次の写像はいずれも gcd-property をもつ準多項式である:

- (1) $m(\chi_i; q)$;
- (2) $q \mapsto \chi_{L_q}$.

さらに, $\chi_{L_q}(\gamma)$ や重複度の関数 $m(\chi_i; q)$ は明示的に次のように表すことができる:

$$\chi_{L_q}(\gamma) = \left(\prod_{j=1}^{r(\gamma)} \gcd\{e_{\gamma,j}, q\} \right) q^{\ell-r(\gamma)}, \quad m(\chi_i; q) = \frac{1}{F} \sum_{\gamma \in \Gamma} \chi_i(\gamma) \left(\prod_{j=1}^{r(\gamma)} \gcd\{e_{\gamma,j}, q\} \right) q^{\ell-r(\gamma)}.$$

ただし, 単位行列 I に対して, $r(\gamma) := \text{rank}(R_\gamma - I)$, $e_{\gamma,1}, \dots, e_{\gamma,r(\gamma)}$ は行列 $R_\gamma - I$ の単因子である.

2.3 The number of orbits

Γ の L_q への作用における Γ -軌道の集合を L_q/Γ で表す:

$$L_q/\Gamma := \left\{ \Gamma(x) \mid x \in L_q \right\}.$$

λ を Γ の 1 次元既約指標とする. Γ -軌道 $\Gamma(x)$ のうち, 固定部分群 Γ_x が $\lambda^{-1}(1)$ に含まれるものの個数を $f_{L/\Gamma}(\lambda; q)$ で表す:

$$f_{L/\Gamma}(\lambda; q) := \# \left\{ \Gamma(x) \in L_q/\Gamma \mid \Gamma_x \subseteq \lambda^{-1}(1) \right\}.$$

特に, 自明な指標 $\mathbf{1}$ に対して $f_{L/\Gamma}(\lambda; q) = \#(L_q/\Gamma)$ である. このとき, $f_{L/\Gamma}(\lambda; q)$ が χ_{L_q} の λ に関する重複度 $m(\lambda; q)$ に等しいため (cf. [UY, Lemma 2.7]), 次が従う.

Theorem 2.2 ([UY, Corollary 2.8]). $f_{L/\Gamma}(\lambda; q)$ は q に関して gcd-property をもつ準多項式となる.

2.4 Reciprocity for the multiplicities

Γ 上の関数 $\delta: \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ を

$$\delta(\gamma) = (-1)^{r(\gamma)}$$

^{*3} 大阪大学大学院理学研究科教授

で定める．ただし， $r(\gamma) = \text{rank}(R_\gamma - I)$ である．このとき， $\delta(\gamma) = \det R_\gamma$ であることがわかり， δ は Γ の 1 次元既約指標となる (cf. [UY, Lemma 2.9], [Sta11, Lemma 5.5])．ゆえに， Γ の既約指標 χ_i に対して，その積 $\chi_i \otimes \delta$ も Γ の既約指標となる．それぞれの重複度の関数 $m(\chi_i; q)$ ， $m(\chi_i \otimes \delta; q)$ の間には，次の関係がある．

Theorem 2.3 ([UY, Theorem 2.10]). Γ の既約指標 χ_i に対して，

$$m(\chi_i \otimes \delta; q) = (-1)^\ell m(\chi_i; -q).$$

特に， δ が自明な指標であるとき， $m(\chi_i; q)$ は偶関数または奇関数のいずれかである．

この関係は，準多項式 $F: q \mapsto \chi_{L_q}$ に関する次の関係式を誘導する．

Corollary 2.4 ([UY, Corollary 2.11]). 各 $q \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して，

$$F(q) = (-1)^\ell \delta F(-q).$$

2.5 Example

Γ を γ で生成される 6 次巡回群とする．

$$\chi: \Gamma \longrightarrow \mathbb{C}; \quad \gamma \longmapsto \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{6}\right)$$

で定まる群準同型は Γ の既約指標で，残りの既約指標は $\chi^2, \chi^3, \chi^4, \chi^5, \chi^6$ である．特に， χ^6 は自明な指標 $\mathbf{1}$ に等しい．2 次元の lattice $L = \mathbb{Z}e_1 \oplus \mathbb{Z}e_2$ を考え， Γ の L への作用は，

$$\gamma(e_1) = e_1 + e_2, \quad \gamma(e_2) = -e_1$$

となるように定める．このとき， e_1, e_2 をうまく並べることで， Γ は平面の 60 度回転として作用することになる． χ_{L_q} における重複度の関数を計算すると，次の通りである：

$$\begin{aligned} m(\chi; q) = m(\chi^5; q) &= \begin{cases} \frac{1}{6}(q^2 - 1) & \gcd\{6, q\} = 1; \\ \frac{1}{6}(q^2 - 4) & \gcd\{6, q\} = 2; \\ \frac{1}{6}(q^2 - 3) & \gcd\{6, q\} = 3; \\ \frac{1}{6}(q^2 - 6) & \gcd\{6, q\} = 6, \end{cases} & m(\chi^3; q) = \begin{cases} \frac{1}{6}(q^2 - 1) & \gcd\{6, q\} = 1; \\ \frac{1}{6}(q^2 - 4) & \gcd\{6, q\} = 2; \\ \frac{1}{6}(q^2 + 3) & \gcd\{6, q\} = 3; \\ \frac{1}{6}q^2 & \gcd\{6, q\} = 6, \end{cases} \\ m(\chi^2; q) = m(\chi^4; q) &= \begin{cases} \frac{1}{6}(q^2 - 1) & \gcd\{6, q\} = 1; \\ \frac{1}{6}(q^2 + 2) & \gcd\{6, q\} = 2; \\ \frac{1}{6}(q^2 - 3) & \gcd\{6, q\} = 3; \\ \frac{1}{6}q^2 & \gcd\{6, q\} = 6, \end{cases} & m(\mathbf{1}; q) = \begin{cases} \frac{1}{6}(q^2 + 5) & \gcd\{6, q\} = 1; \\ \frac{1}{6}(q^2 + 8) & \gcd\{6, q\} = 2; \\ \frac{1}{6}(q^2 + 9) & \gcd\{6, q\} = 3; \\ \frac{1}{6}(q^2 + 12) & \gcd\{6, q\} = 6. \end{cases} \end{aligned}$$

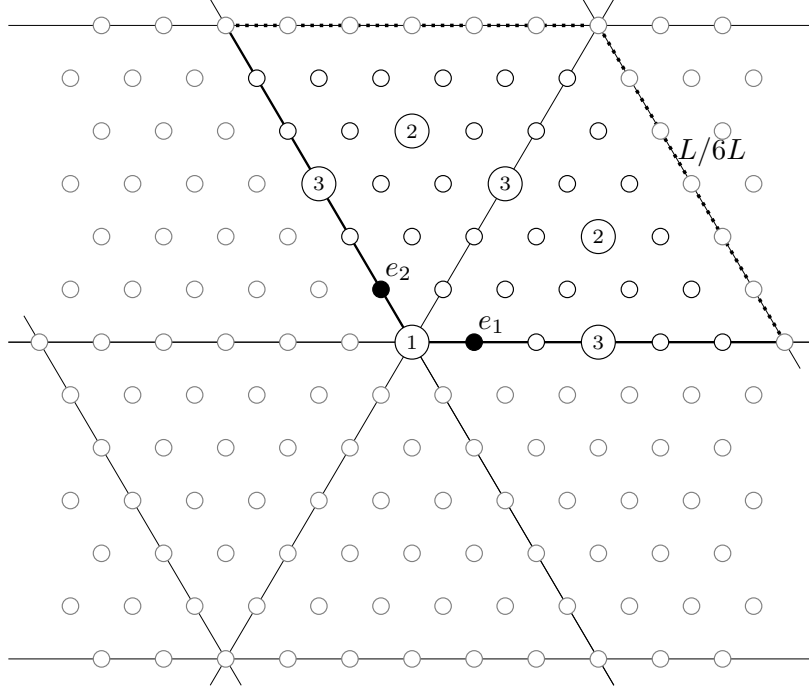


図1 lattice L と $L/6L$. $\textcircled{i}$ はその点が長さ i の orbit に含まれる点であることを意味している. $L/6L$ のその他の点はすべて長さ 6 の orbit に含まれる. $\bullet$ は L の $\mathbb{Z}$ -basis である.

Γ の既約指標はすべて 1 次元であるから、重複度の関数はすべて Γ -軌道を数える関数で、 $m(\chi; q)$ は長さ 6 の Γ -軌道の個数、 $m(\chi^2; q)$ は長さ 3, 6 の Γ -軌道の個数、 $m(\chi^3; q)$ は長さ 2, 6 の Γ -軌道の個数、 $m(1; q)$ はすべての Γ -軌道の個数をそれぞれ数えている. 実際、長さ 1 の Γ -軌道は 1 つ、長さ 2 の Γ -軌道は $q \in 3\mathbb{Z}$ のときに 1 つ、長さ 3 の Γ -軌道は $q \in 2\mathbb{Z}$ のときに 1 つ現れ、その他はすべて長さ 6 の Γ -軌道となる (図 1 も参照).

3 Weyl groups

3.1 Coroot lattice and fundamental alcove

V を内積 $(\cdot, \cdot)$ をもつ ℓ 次元 Euclid 空間とし、 Φ を V 上の既約な root 系とする. 群 Γ を Φ の Weyl 群 $W = W(\Phi)$ とし、lattice L として Φ の coroot lattice $\check{Q} = \check{Q}(\Phi)$ を考える:

$$\check{Q} = \check{Q}(\Phi) = \sum_{\alpha \in \Phi} \mathbb{Z}\alpha^\vee, \quad \alpha^\vee := \frac{2\alpha}{(\alpha, \alpha)}.$$

各 $q \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して、 $\check{Q}_q := \check{Q}/q\check{Q}$ とおく. また、群 $qW_{\text{aff}} := q\check{Q} \rtimes W$ を与える. $q = 1$ であるときは、 $1W_{\text{aff}} = \check{Q} \rtimes W$ を **affine Weyl 群** といい、単に W_{aff} で表す. 正 root $\alpha \in \Phi^+$ と整数 $k \in \mathbb{Z}$ に対して、affine 超平面 $H_{\alpha, k}$ を

$$H_{\alpha, k} := \left\{ x \in V \mid (\alpha, x) = k \right\}$$

で定義する．これらの超平面の補集合 $V \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} H_{\alpha, k}$ の連結成分は **alcove** と呼ばれ，特に

$$A_{\circ} := \left\{ x \in V \mid 0 < (\alpha, x) < 1 \text{ for all } \alpha \in \Phi^+ \right\}$$

は root 系 Φ の **fundamental alcove** という．各 alcove の閉包は ℓ 次元単体である．root 系 Φ の simple root $\alpha_1, \dots, \alpha_{\ell}$ と highest root $\tilde{\alpha}$ に対して

$$\mathcal{W} := \{H_{\alpha_1, 0}, \dots, H_{\alpha_{\ell}, 0}, H_{\tilde{\alpha}, 1}\}$$

とおく． $\mathcal{W}$ の各超平面を $A_{\circ}$ の**壁 (wall)** という．各 $H \in \mathcal{W}$ から定まる開半空間のうち $A_{\circ}$ を含む方を H^+ で表すと， $\bigcap_{H \in \mathcal{W}} H^+ = A_{\circ}$ となる．

$$\mathcal{F} := \left\{ \bigcap_{H \in \mathcal{U}} H \cap \bigcap_{H \notin \mathcal{U}} H^+ \neq \emptyset \mid \mathcal{U} \subseteq \mathcal{W} \right\}$$

とおく． $\mathcal{F}$ の各元を**面 (face)** という． $\overline{A_{\circ}} = \bigsqcup_{F \in \mathcal{F}} F$ であることに注意する．

また，affine Weyl 群 W_{aff} は alcove の集合に simply transitive に作用している．つまり， $\overline{A_{\circ}}$ は affine Weyl 群 W_{aff} の基本領域 (fundamental domain) となるから， $\check{Q}_q$ の W -軌道と $q\overline{A_{\circ}}$ 上の格子点の間には一対一対応があることがわかる．

Lemma 3.1 ([Hai94, Lemma 7.4.1]). 各 $q \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して，次の対象の間には一対一対応がある：

- $\check{Q}_q$ の W -軌道；
- $\check{Q}$ の qW_{aff} -軌道；
- $\check{Q} \cap q\overline{A_{\circ}}$ の点．

さらに Lemma 3.1 の帰結として，自明な指標 $\mathbf{1}$ および行列式指標 δ に関する $\chi_{\check{Q}_q}$ の重複度について次がわかる．

Proposition 3.2 ([Hai94, §7.4]). $m(\mathbf{1}; q)$ および $m(\delta; q)$ はそれぞれ $\overline{A_{\circ}}$, $A_{\circ}$ の $\check{Q}$ に関する Ehrhart 準多項式である：

- (1) $m(\mathbf{1}; q) = \#(\check{Q} \cap q\overline{A_{\circ}})$;
- (2) $m(\delta; q) = \#(\check{Q} \cap qA_{\circ})$.

W における一般の既約指標 χ に対しては，fundamental alcove の各面における Ehrhart 準多項式との関係として次が得られた．

Theorem 3.3 (U.). W の既約指標 χ に対して，

$$m(\chi; q) = \sum_{F \in \mathcal{F}} \frac{\#(qF \cap \check{Q})}{\#W_F} \sum_{w \in W_F} \chi(w). \quad (3.1)$$

ただし， W_F は F を含む壁に付随した鏡映で生成される W の部分群である．

式 (3.1) は， $\check{Q}_q$ の置換指標 $\chi_{\check{Q}_q}$ を各軌道の置換指標で分解することで得られ，Proposition 3.2 の各式は (3.1) の特別な場合となる．

3.2 Symmetric group

Γ が ℓ 次対称群 $\mathfrak{S}_\ell$ である場合を考える. $\mathbb{R}^\ell$ の標準基底 $\{e_1, \dots, e_\ell\}$ に対して,

$$L := \mathbb{Z}e_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}e_\ell$$

とおく. 対称群 $\mathfrak{S}_\ell$ は $\{e_1, \dots, e_\ell\}$ の置換として作用しているとする.

整数 ℓ の**分割 (partition)** とは, 非負整数の列 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ で,

$$\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_p > 0, \quad \lambda_1 + \dots + \lambda_p = \ell$$

を満たしているものをいう. ここで, p は分割 λ の長さ (length) といい, $\ell(\lambda)$ で表す.

以下に述べるように, ℓ 次対称群 $\mathfrak{S}_\ell$ は ℓ の分割と密接にかかわっている. 元 $w \in \mathfrak{S}_\ell$ の **cycle type** とは, w を巡回置換の積で表すときに現れる各巡回置換の長さを降順に並べたものをいい, ℓ の分割となる. 例えば, $w = (1\ 2)(3\ 4\ 6) \in \mathfrak{S}_6$ の cycle type は $(3, 2, 1)$ である. また, $\mathfrak{S}_\ell$ の既約指標全体と ℓ の分割全体の間には一対一対応があることが知られている. ℓ の分割 μ に対応する $\mathfrak{S}_\ell$ の既約指標を χ^μ で表す.

各 $q \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して, 置換指標 χ_{L_q} およびその重複度の関数 $m(\chi^\mu; q)$ を具体的に求めたい. 各元 $w \in \mathfrak{S}_\ell$ の基底 $\{e_1, \dots, e_\ell\}$ に関する表現行列 R_w は置換行列であるから, 単位行列 I に対して $R_w - I$ の単因子を計算することは容易である.

Lemma 3.4. $w \in \mathfrak{S}_\ell$ の cycle type を λ とするとき, $r(w) = \text{rank}(R_w - I)$ は $\ell - \ell(\lambda)$ に等しい. また, 行列 $R_w - I$ の単因子はすべて 1 である.

したがって, 各 $w \in \mathfrak{S}_\ell$ の cycle type を λ_w で表すとき,

$$\chi_{L_q}(w) = q^{\ell(\lambda_w)}$$

となる. また, ℓ の分割 μ に対応する既約指標 χ^μ に対して,

$$m(\chi^\mu; q) = \frac{1}{\ell!} \sum_{w \in \mathfrak{S}_\ell} \chi^\mu(w) q^{\ell(\lambda_w)} \quad (3.2)$$

となるため, $m(\chi^\mu; q)$ は周期 1 の準多項式 (つまり単に多項式) となる. したがって, χ_{L_q} も周期 1 の準多項式である. また, (3.2) の右辺は, 古くから様々な形で研究されている多項式である. 特に, 右辺の多項式の根がすべて整数であることが知られており, 分割 μ から容易に得られる.

Theorem 3.5 (cf. [Lit36, p.56], [Mol82, Theorem 1]). $\mathfrak{S}_\ell$ の既約指標 χ^μ に対して,

$$\sum_{w \in \mathfrak{S}_\ell} \chi^\mu(w) q^{\ell(\lambda_w)} = \chi^\mu(1) \prod_{i=1}^{\ell(\mu)} \prod_{j=1}^{\mu_i} (q - i + j).$$

また, $\mathfrak{S}_\ell$ は $A_{\ell-1}$ 型の root 系の Weyl 群であり, 対応する coroot lattice $\check{Q}$ は

$$\check{Q} = \mathbb{Z}(e_1 - e_2) \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}(e_{\ell-1} - e_\ell)$$

となる．各 $q \in \mathbb{Z}_{>0}$, $w \in \mathfrak{S}_\ell$ に対して $\chi_{\check{Q}_q}(w)$ を計算したいが，具体的に行列の単因子を計算するのは（不可能ではないが）容易ではない．（比較的）容易に計算をするために， L と rank の等しい sublattice

$$M := \check{Q} \oplus \mathbb{Z}(e_1 + \cdots + e_\ell)$$

を与える． $e_1 + \cdots + e_\ell$ が $\mathfrak{S}_\ell$ の作用で不変であるから，任意の $w \in \mathfrak{S}_\ell$ に対して

$$\chi_{M_q}(w) = q \cdot \chi_{\check{Q}_q}(w) \quad (3.3)$$

がわかる．

一方で， $\chi_{L_q}(w)$ と $\chi_{M_q}(w)$ は， q, w を固定するごとに定数倍の違いしかないことがわかる^{*4}：

$$\chi_{M_q}(w) = \gcd\{\lambda_1, \dots, \lambda_{\ell(\lambda)}, q\} \cdot \chi_{L_q}(w). \quad (3.4)$$

ただし， $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{\ell(\lambda)})$ は $w \in \mathfrak{S}_\ell$ の cycle type である．よって，(3.3)，(3.4) より

$$\chi_{\check{Q}_q}(w) = \gcd\{\lambda_1, \dots, \lambda_{\ell(\lambda)}, q\} \cdot q^{\ell(\lambda)-1}$$

となる．ゆえに， $\chi_{\check{Q}_q}$ は周期 ℓ の準多項式である．

参考文献

- [BR07] M. Beck and S. Robins, *Computing the continuous discretely*, Undergraduate Texts in Mathematics, vol. 285, Springer New York, Berlin, Heidelberg, October 2007.
- [Hai94] M. D. Haiman, *Conjectures on the quotient ring by diagonal invariants*, Journal of Algebraic Combinatorics **3** (1994), 17–76.
- [KTT08] H. Kamiya, A. Takemura, and H. Terao, *Periodicity of hyperplane arrangements with integral coefficients modulo positive integers*, Journal of Algebraic Combinatorics **27** (2008), no. 3, 317–330.
- [Lit36] D. E. Littlewood, *Some properties of s -functions*, Proceedings of the London Mathematical Society **s2-40** (1936), no. 1, 49–71.
- [Mol82] V. F. Molchanov, *Poincaré polynomials of representations of finite groups generated by reflections*, Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR **31** (1982), no. 6, 423–427.
- [Sta11] A. Stapledon, *Equivariant ehrhart theory*, Advances in Mathematics **226** (2011), no. 4, 3622–3654.
- [UY] R. Uchiumi and M. Yoshinaga, *The quasi-polynomiality of mod q permutation representation for a linear finite group action on a lattice*, arXiv:2409.01084 [math].
- [Yos18] M. Yoshinaga, *Worpitzky partitions for root systems and characteristic quasi-polynomials*, Tohoku Mathematical Journal **70** (2018), no. 1, 39–63.

^{*4} この事実は一般の lattice L と rank の等しい sublattice M について得られる．